



گزینه ۴

۱

اول:

$$\begin{aligned}
 & a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} \\
 &= (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) + (a_1 + 10d) + (a_1 + 12d) \\
 &= 4a_1 + 52d = 4(a_1 + 13d) = 28 \Rightarrow a_1 + 13d = 7
 \end{aligned}$$

دوم: جمله چهاردهم همان $a_{14} = a_1 + 13d$ است که مقدار آن را برابر ۷ به دست آوردیم.

گزینه ۴

۲

اول: سه عدد را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع این سه عدد برابر ۲۴ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۴۴۰ است:

$$\begin{aligned}
 a-d+a+a+d &= 24 \Rightarrow 3a = 24 \Rightarrow a = 8 \\
 (a-d)(a)(a+d) &= 440 \xrightarrow{a=8} \underbrace{(\lambda-d)(\lambda+d)(\lambda)}_{\text{مزدوج}} = (64-d^2) \times 8 = 440 \\
 \Rightarrow 64-d^2 &= 55 \Rightarrow d^2 = 64-55 = 9 \Rightarrow d = \pm 3
 \end{aligned}$$

دوم: در هر دو صورت $d = 3$ یا $d = -3$ ، اعداد به صورت ۱۱ و ۸ و ۵ خواهند بود که عدد بزرگ‌تر برابر ۱۱ است.

گزینه ۲

۳

۱۸، b ، a جملات متوالی دنباله هندسی هستند، پس $b^2 = 18a$ است. $a, 10, b$ جملات متوالی دنباله حسابی‌اند، پس $a+b=20$.

$$\begin{aligned}
 18a + 18b &= 360 \xrightarrow{b^2=18a} b^2 + 18b - 360 = 0 \\
 \Rightarrow (b+30)(b-12) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -30 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 50 \\ a = 8 \end{cases}
 \end{aligned}$$

اگر دنباله‌ای هم هندسی باشد و هم حسابی، باید همه جملات باهم برابر و غیرصفر باشند که در این صورت $d = 0$ و $r = 1$ خواهد بود. پس در این مسئله:

$$x = y = z \Rightarrow \frac{x^2 + 3y^2}{xy} = \frac{x^2 + 3x^2}{x \cdot x} = 4$$

تعداد جملات دسته n ام از رابطه $a_n = 2n - 1$ به دست می‌آید.
تعداد جملات تا آخر دسته دهم برابر است با:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$1 + 3 + \dots + (2 \times 10 - 1) = 10^2 = 100$$

به عبارت دیگر جمله آخر هر دسته برابر n^2 است.
دسته یازدهم $21 = 11 - 1 \times 2$ عضو دارد که جمله وسطی آن جمله یازدهم آن می‌باشد.
پس برای پیدا کردن جمله وسط دسته یازدهم باید ۱۱ واحد از جمله آخر دسته دهم جلو برویم.

$$100 + 11 = 111$$

اول:

$$\frac{a_3 a_5}{a_1 a_3} = \frac{16}{4} \Rightarrow \frac{a_5}{a_1} = 4 \Rightarrow \frac{a_1 q^4}{a_1} = q^4 = 4 \Rightarrow q^2 = 2$$

دوم:

$$a_1 a_3 = 4 \Rightarrow a_1 \times a_1 q^2 = 4 \Rightarrow a_1^2 \times q^2 = 4$$

$$\xrightarrow{q^2=2} a_1^2 \times 2 = 4 \Rightarrow a_1^2 = 2 \Rightarrow a_1 = \pm\sqrt{2}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت $a_7^2 - a_3^2$ را تجزیه می‌کنیم:

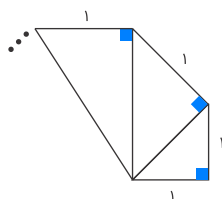
$$\begin{aligned} a_7^2 - a_3^2 &= (a_7 - a_3)(a_7 + a_3) \\ &= [(a_1 + 6d) - (a_1 + 2d)][(a_1 + 6d) + (a_1 + 2d)] \\ &= 4d \times (2a_1 + 8d) = 4d \times \underbrace{2(a_1 + 4d)}_{a_5} = 8d \times a_5 \end{aligned}$$

بنابراین $8d$ برابر a_5 است.

با دقت در شکل، وتر اولین مثلث باتوجه به رابطه فیثاغورس $\sqrt{2}$ است. وتر دومین مثلث $\sqrt{3}$ و به همین ترتیب ادامه دارد که باتوجه به جدول زیر:

شماره مثلث	۱	۲	۳	...	n
طول وتر	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	...	$\sqrt{n+1}$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{n+1}$$



ارتفاع توپ پس از اولین برخورد: $۲۵ \times ۵/۶ = ۱۵$
 ارتفاع توپ پس از دومین برخورد: $۱۵ \times ۵/۶ = ۹$
 ارتفاع توپ پس از سومین برخورد: $۹ \times ۵/۶ = ۷/۲$
 ارتفاعی که توپ پس از n امین برخورد بالا می‌آید برابر $۲۵ \times (۵/۶)^n$ است.

سعی می‌کنیم الگوی تعداد خانه‌های سفید و سیاه را پیدا کنیم:
 همان‌طور که می‌بینیم در مورد الگوی تعداد خانه‌های سیاه، با یک الگوی خطی مواجه هستیم که محاسبه آن کار ساده‌ای است و به الگوی $a_n = 2n + 2$ می‌رسیم. اما در مورد الگوی تعداد خانه‌های سفید باتوجه به اینکه اختلاف تعداد هر دو مرحله متوالی تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند، می‌توان دریافت که به یک الگوی درجه دوم برخورد می‌کنیم. اما برای به دست آوردن رابطه این الگو، کافی است کمی دقت کنیم: $۲ = ۱ \times ۲$, $۶ = ۲ \times ۳$, $۱۲ = ۳ \times ۴$ و ... بنابراین الگوی تعداد خانه‌های سفید $b_n = n(n+1)$ است. باید ببینیم در چه مرحله‌ای (به ازای کدام n) تعداد خانه‌های سفید ۳۸۰ تا است و بعد تعداد خانه‌های سیاه را از رابطه $a_n = 2n + 2$ محاسبه کنیم:

$$b_n = n(n+1) = 380 \Rightarrow n(n+1) = 19 \times 20 \Rightarrow n = 19 \Rightarrow a_{19} = 2(19) + 2 = 40$$

به جملات توجه کنید:

$$(-1)^n n^2 : -(1)^2, +(2)^2, -(3)^2, \dots$$

با افزایش n جملات منفی کاهش و جملات مثبت افزایش می‌یابد. پس جمله اول بزرگ‌ترین جمله منفی و جمله دوم کوچک‌ترین جمله مثبت است.

$$a_2 - a_1 = 4 - (-1) = 5$$

جمله عمومی یک دنباله حسابی، همواره یک چندجمله‌ای درجه ۱ برحسب n است (یعنی توان n باید ۱ باشد). بنابراین فقط گزینه سوم جمله عمومی دنباله حسابی است. به علاوه ضریب n برابر با قدر نسبت (اختلاف مشترک) یا همان d است. در $a_n = \frac{n+1}{2}$ جمله اول برابر ۱ و $a_1 = 1$ و قدر نسبت $d = \frac{1}{2}$ است.

$$S = a_3 + a_4 + \dots + a_{33} + a_{34} = (\sqrt{4} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{6}) + \dots + (\sqrt{35} - \sqrt{36})$$

دقت کنید که جمله دوم هر پرانتز با جمله بعدی ساده می‌شوند و فقط دو عدد باقی می‌ماند:

$$S = \sqrt{4} - \sqrt{36} = 2 - 6 = -4$$

$$a_3, a_5, a_9 \Rightarrow (a_1 + 2d), (a_1 + 4d), (a_1 + 8d)$$

$$\xrightarrow[\text{دنباله هندسی}]{\text{جملات متوالی}} (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 16d^2 + 8a_1d = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$

$$\Rightarrow 2a_1d = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = 0$$

$$S = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$$

$$3S = \frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \dots + \frac{20-17}{17 \times 20}$$

$$3S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

دقت کنید که دومین عدد هر پرانتز با اولین عدد پرانتز بعدی ساده می‌شوند:

$$3S = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \Rightarrow S = \frac{3}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 0/15$$

دقت کنید:

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1, a_2 = 3 = 2^2 - 1, a_3 = 7 = 2^3 - 1, a_4 = 15 = 2^4 - 1$$

پس $a_n = 2^n - 1$ و در نهایت $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$ خواهد بود.

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 2a + b = 40 \\ t_7 = 7a + b = -15 \end{cases} \Rightarrow 5a = -55 \Rightarrow a = -11 \Rightarrow b = 62$$

$$\frac{t_8}{t_{20}} = \frac{-11 \times 8 + 62}{-11 \times 20 + 62} = \frac{-26}{-158} = \frac{13}{79}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & , & 7 & , & 11 & , & 17 & , \dots \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & & \\ & +2 & +4 & +6 & & & & \end{array}$$

تفاضلات جملات دنباله، الگوی خطی است.

$$a_{10} = (a_1)^9 \Rightarrow a_1 q^9 = (a_1 q^5)^9 \Rightarrow a_1 q^9 = a_1^9 q^{45} \\ \Rightarrow a_1 q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{a_1} = \sqrt{2}$$

واسطه هندسی بین a , c برابر $b = \pm\sqrt{ac}$ است.

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1} \quad \text{تعریف نشده}$$

پس واسطه هندسی وجود ندارد.

اول: قدر نسبت دنباله (اختلاف مشترک) را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{128 - 32}{5 + 1} = 16$$

دوم: جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$32 \xrightarrow{+16} 48 \xrightarrow{+16} 64 \xrightarrow{+16} 80$$

$\downarrow$ جمله سوم دنباله $\downarrow$ جمله سوم درج شده

$$\xrightarrow{+16} 96 \xrightarrow{+16} 112 \xrightarrow{+16} 128 \xrightarrow{+16} 144$$

$$144 = 80 + 64 = \text{جمله سوم درج شده} + \text{جمله سوم دنباله}$$

توجه کنید جملات ۴۸ و ۶۴ و ۸۰ و ۹۶ و ۱۱۲ را بین دو عدد ۳۲ و ۱۲۸ درج کرده‌ایم که در این صورت جمله سوم درج شده همان ۸۰ است.

باتوجه به فرض مسئله داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 \Rightarrow x + xq + xq^2 + xq^3 = 10$$

$$\Rightarrow x(1 + q + q^2 + q^3) = 10 \xrightarrow{1+q+q^2+q^3 = \frac{q^4-1}{q-1}} x \times \frac{q^4-1}{q-1} = 10 \quad (1)$$

$$a_5 = 10 + a_1 \Rightarrow xq^4 = 10 + x \Rightarrow x(q^4 - 1) = 10 \Rightarrow q^4 - 1 = \frac{10}{x} \quad (2)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$x \times \frac{\frac{10}{x}}{q-1} = 10 \Rightarrow q-1 = 1 \Rightarrow q = 2$$

جمله اول دنباله حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به اینکه $a_{12} = a_1 + 11d$ و $a_5 = a_1 + 4d$, $a_7 = a_1 + d$ داریم، $a_n = a_1 + (n-1)d$ از طرفی می‌دانیم که اگر x, y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $y^2 = x.z$ پس باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$a_7^2 = a_7 \cdot a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d (*)$$

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a_7 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنباله هندسی، از تقسیم دو جمله متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنباله هندسی مورد نظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_7} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

$$a_5 = 27a_7 \Rightarrow a_1r^4 = 27a_1r \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

حال حاصل $\frac{a_3 + a_6}{a_7}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_3 + a_6}{a_7} = \frac{a_1r^2 + a_1r^5}{a_1r} = \frac{a_1r(r + r^3)}{a_1r} = r + r^3 \xrightarrow{r=3} 3 + 9 = 12$$

در دنباله هندسی $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}, \quad a_7 = \frac{2^0}{3^7} \Rightarrow a_1q = \frac{2^0}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}a_1 = \frac{2^0}{3} \Rightarrow a_1 = 1^0 \Rightarrow a_{1^0} = 1^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{7^9} = \frac{5 \times 2^{1^0}}{3^{7^9}}$$